Chapitre 14

# Diagonalisation

### Rappel : Lien entre matrice et application linéaire

• Toute application linéaire $f : E \to F$ admet une matrice dans n'importe quelles bases $\mathcal{B}$ de $E$ et $\mathcal{G}$ de $F$. (On la note $M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(f)$.)
Dans le cas d'un endomorphisme, on utilise généralement la même base au départ et à l'arrivée. Dans la base $\mathcal{B}$, on note alors $M_{\mathcal{B}}(f)$. La matrice est alors carrée.

• À partir de toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, en choisissant $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $m$ et $n$ ainsi que des bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{G}$ de $E$ et $G$, on peut construire une unique application linéaire $f : E \to F$ de matrice $M$ dans les bases en question en définissant :

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(f) = M = \quad \begin{array}{c} \\ \mathcal{G}\left\{\begin{array}{c} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} f(b_1) & \dots & f(b_m) \end{array}}^{"f(\mathcal{B})"} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,m} \end{pmatrix} \end{array}$$

En particulier, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, elle peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme de $E$ de dimension $n$.

## I Valeur propre et vecteur propre

Dans tout ce chapitre, on considèrera $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ de dimension $n$, $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$.

**Notation :**
Si $\mathcal{B}$ est une base de $E$, pour simplifier les notations, on notera souvent $M_{\mathcal{B}}$ au lieu de $M_{\mathcal{B}}(f)$.

### I-1 Valeur propre d'un endomorphisme

**Commentaires :**
*Les matrices les plus pratiques à utiliser, tant dans le calcul du rang que le calcul des puissances sont les matrices triangulaires, voir même mieux, les matrices diagonales. Le but de ce chapitre est déterminer, si possible, une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme sera diagonale (ou du moins "la plus diagonale possible")*

**Remarque :**
On cherche à "annuler" une bonne partie des coefficients non diagonaux. Or, si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on obtient l'équivalence suivante :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \quad \begin{array}{c} \\ e_i \end{array} \begin{array}{c} f(e_i) \\ \begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & \lambda & \cdots \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} \end{array} \iff f(e_i) = \lambda e_i$$

Le but est donc de trouver un maximum de vecteurs non nuls linéairement indépendants tels que $f(v)$ et $v$ soient colinéaires (i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.)

**Définition**
On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* (*vap*) de l'endomorphisme $f$ s'il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme $f$ est appelé *spectre* de $f$ et noté $Sp(f)$.

**Exemples :**
Supposons $n = 2$ et $=\{e_1, e_2\}$ une base de $E$ ;

1 ■ Si $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors 2 est valeur propre car

$$f(e_1) = \mathbf{2}\ e_1$$

2 ■ Si $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors 0 est valeur propre car

$$f(e_2 - e_1) = \vec{0} = \mathbf{0} \times \underbrace{(e_2 - e_1)}_{\neq 0}$$

### I-2 Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme

**Définition**
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de l'endomorphisme $f$, on appelle $v$ un *vecteur propre* (*vep*) de la valeur propre $\lambda$ tout vecteur $v$ **non nul** tel que $f(v) = \lambda v$. L'ensemble $E_\lambda(f) = \{v \in E \,|\, f(v) = \lambda v\}$ s'appelle *l'espace propre* associé à la valeur propre $\lambda$.

- **Exemples :**

Supposons $n = 2$ et $=\{e_1, e_2\}$ une base de $E$ ;

3 ■ Si $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $e_1 \neq 0$ est vecteur propre de valeur propre 2 car

$$f(\boldsymbol{e_1}) = 2\boldsymbol{e_1}$$

4 ■ Si $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $v = e_2 - e_1 \neq 0$ et vecteur propre de valeur propre 0 car

$$f(\boldsymbol{v}) = \vec{0} = 0 \times \boldsymbol{v}$$

Remarques :

**1)** $\lambda$ est une valeur propre de $f$ si et seulement si $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$.
(c'est la définition d'une valeur propre.)

**2)** $0_E \in E_\lambda(f)$. Les vecteurs propres de *vap* $\lambda$ sont les éléments non nuls de $E_\lambda(f)$.

**3)** $\boxed{E_\lambda = \ker(f - \lambda Id),}$ ce qui entraîne immédiatement que $E_\lambda$ est un $\mathbb{K}$-e.v. et qu'**un vecteur propre n'est pas unique !** (Par exemple, si $v$ est un vecteur propre de $\lambda$, tout $\alpha v$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$ est un vecteur propre de $\lambda$.)

**4)** Si $v$ doit être non nul, il se peut par contre que $\lambda = 0$. Dans ce cas, on a $\boxed{E_0(f) = \ker f.}$

**5)** Les valeurs propres et les vecteurs propres ne dépendent pas d'une base.

Notation : S'il n'y a pas de confusion possible, on notera $E_\lambda$ au lieu de $E_\lambda(f)$.

## I-3 Stratégies de calcul des valeurs propres d'un endomorphisme

Tout repose sur les équivalences suivantes :

### Propriété 1 *fondamentale*

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est une valeur propre} &\iff E_\lambda \neq \{0_E\} \\
&\iff \ker(f - \lambda Id) \neq \{0_E\} \\
&\iff f - \lambda Id \text{ est non injective} \\
&\iff f - \lambda Id \text{ est non surjevtive} \\
&\iff \operatorname{rg}(f - \lambda Id) < n = \dim E
\end{aligned}$$

Application : Cette propriété permet de déterminer plusieurs méthodes pour trouver l'ensemble des valeurs propres de $f$.

### Méthode 1 : On détermine l'ensemble des valeurs $\lambda$ telles que $\operatorname{rg}(f - \lambda Id) < n$.

Ceci se fait généralement à l'aide d'une matrice de $f$ dans une base.

- **Exemple 5 :**

Supposons que $E$ soit de dimension 3. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$. Alors, $\operatorname{rg}(f - \lambda Id) = \operatorname{rg}(M - \lambda I_3)$. Or,

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

#### Première stratégie possible :

*"Sans se poser de questions" : faire un* **pivot de Gauss** *pour arriver à une matrice triangulaire.* Il faut néanmoins choisir stratégiquement ses pivots, mais attention, toujours **non nuls** !

$$\begin{aligned}
M - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & \boxed{1} \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\
&\quad \text{on annule les coeff : } L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1; \quad L_3 \leftarrow L_3 + (5+\lambda)L_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4-2\lambda & 8-\lambda & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le nouveau pivot devrait être en $C2; L2$, mais l'expression peut s'annuler.

À ce stade là, on a donc deux possibilités :

⋆ *continuité de la méthode : "je ne me pose pas de questions" :*

On prend comme pivot la quantité $8 - \lambda$ (coefficient du milieu). Néanmoins, il faut s'assurer qu'il est non nul. Il faut donc séparer les cas :

Si $\lambda = 8$ :

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -12 & 0 & 0 \\ -88 & 32 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -88 & 32 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de rang 3. $\lambda = 8$ n'est donc pas valeur propre.

Si $\lambda \neq 8$ : on choisit comme pivot $8 - \lambda$ :

$$M-\lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4-2\lambda & \boxed{8-\lambda} & 0 \\ -\lambda^2-4\lambda+8 & 16+2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

opération : $L_3 \leftarrow (8-\lambda)L_3-(16+2\lambda)L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4-2\lambda & \boxed{8-\lambda} & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A &= (8-\lambda)(-\lambda^2-4\lambda+8)-(16+2\lambda)(4-2\lambda) \\ &= \lambda^3+\lambda^2(\underbrace{-8+4+4}_{=0})+\lambda(\underbrace{-4\times 8-8+2\times 16+2\times 4}_{=-16})+\underbrace{8^2-4\times 16}_{=0} \\ &= \lambda^3-16\lambda=\lambda(\lambda^2-16)=\boxed{\lambda(\lambda-4)(\lambda+4)} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{Sp(f)=\{0,-4,4\}.}$$

$\star$ ou bien *"je me débarrasse du problème de pivot nul" :*

à partir de $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4-2\lambda & 8-\lambda & 0 \\ -\lambda^2-4\lambda+8 & 16+2\lambda & 0 \end{pmatrix}$, on retire les $\lambda$ du coefficient diagonal : $L_2 \leftarrow 2L_2+L_3$

$$M-\lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2(4-2\lambda)-\lambda^2-4\lambda+8 & 32 & 0 \\ -\lambda^2-4\lambda+8 & 16+2\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -\lambda^2-8\lambda+16 & 32 & 0 \\ -\lambda^2-4\lambda+8 & 16+2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

On simplifie la deuxième colonne par 2

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda^2-8\lambda+16 & 16 & 0 \\ -\lambda^2-4\lambda+8 & 8+\lambda & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{puis} \quad L_3 : \quad 16L_3-(8+\lambda)L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda^2-8\lambda+16 & 16 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A &= 16(-\lambda^2-4\lambda+8)-(8+\lambda)(-\lambda^2-8\lambda+16) \\ &= 16(-\lambda^2-4\lambda+8)-\big(-\lambda^3+\lambda^2(\underbrace{-8-8}_{-16})+\lambda(\underbrace{-8.8+16}_{-64+16=-48})+8.16\big) \\ &= \lambda^3+\lambda^2(-16+16)+\lambda(\underbrace{-4.16+48}_{-16})=\lambda^3-16\lambda=\lambda(\lambda^2-16)=\boxed{\lambda(\lambda-4)(\lambda+4)} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{Sp(f)=\{0,-4,4\}.}$$

Avantage : *avec ces méthodes, on obtient toujours une équation à résoudre.*
Inconvénient : *il n'est pas toujours simple de la résoudre ...*

## Deuxième stratégie possible :

Tenter de mettre en valeur par de simples **combinaisons de lignes ou de colonnes** une colonne ou une ligne entière ayant des coefficients proportionnels.

$$M-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} \underset{\boxed{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 4-\lambda & 4-\lambda & -2 \\ 4-\lambda & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

on annule les coefficients de la première colonne :
$L_2 \to L_2-L_1 \quad L_3 \to L_3-L_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & \boxed{4} & -6-\lambda \end{pmatrix}$$

pas de simplification évidente, alors on revient au pivot de Gauss
on place sur la diagonale un élément non nul de manière certaine, on échang

$$M-\lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -6-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -3 \end{pmatrix}$$

et c'est parti pour le pivot ! $L_3 \to 4L_3-(2-\lambda)L_2$

$$M-\lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \\ 0 & 0 & \underbrace{-3\times 4-(2-\lambda)(-6-\lambda)}_{-\lambda^2-4\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+4) \end{pmatrix}$$

On trouve de même que

$$\boxed{Sp(f)=\{0,-4,4\}}$$

Avantage : *Au final le polynôme dont il faut trouver les racines n'est ici "que" de degré 2 au lieu d'être de degré 3 dans l'autre méthode...*
Inconvénient : *Il n'est pas toujours évident de trouver des combinaisons simples à effectuer, mais il peut valoir la peine de prendre quelques minutes pour y réfléchir. Surtout si la matrice est de grande taille.*

**Méthode 2 : par résolution de système : "recherche" de $\ker(f-\lambda Id)$ :**

On se place dans une base $\mathcal{B}$, dans laquelle on dispose de la matrice $M$ de $f$. On pose $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On cherche les $\lambda$ pour lesquels $\vec{0}$ n'est pas la seule solution du système.

Par exemple, toujours pour $M = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. Alors

$$(f-\lambda Id)(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + \boxed{z} = 0 \\ 2x + (4-\lambda)y - 2z = 0 \\ 3x + 6y - (5+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (4-2\lambda)x + (8-\lambda)y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \big(3+(5+\lambda)(1-\lambda)\big)x + \big(6+2(5+\lambda)\big)y = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + (5+\lambda)L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (4-2\lambda)x + (8-\lambda)y = 0 \\ (8-4\lambda-\lambda^2)x + (16+2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Recherche d'un pivot non nul : $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + \boxed{32}\, y = 0 \\ (8-4\lambda-\lambda^2)x + (16+2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ Ax = 0 & L_3 \leftarrow 16L_3 - (8+\lambda)L_2 \end{cases}$$

où $A = 16(-\lambda^2 - 4\lambda + 8) - (8+\lambda)(-\lambda^2 - 8\lambda + 16) = \lambda(\lambda-4)(\lambda+4)$

Le système admet une unique solution si et seulement si $A = \lambda(\lambda-4)(\lambda+4) \neq 0$. On a donc

$$\lambda \text{ vap } \Leftrightarrow \lambda \in \ker(f-\lambda Id) \Leftrightarrow \boxed{\lambda \in \{0, -4, 4\}}$$

Avantage : *Méthode efficace à tous les coups. (Méthode très similaire au pivot de Gauss dans la matrice $M-\lambda Id$.) Permet de calculer ensuite rapidement les espaces propres...*

Inconvénient : *Pas très esthétique et un peu rébarbatif. De plus, comme dans la méthode du pivot de Gauss, l'équation à résoudre n'est pas toujours très simple.*

## I-4 Stratégies de calcul des espaces propres d'un endomorphisme

`Pour trouver les espaces propres de l'endomorphisme` $f$ `:`

On résoud $(f-\lambda)(v) = 0$, où $\lambda \in Sp(f)$

Ici encore, plusieurs stratégies possibles *qui dépendent principalement de la méthode utilisée pour trouver les vap.* :

- Si on a déterminé les valeurs propres à l'aide du rang de la matrice :

on peut
- Résoudre $MX = \lambda X$ pour chaque valeur propre (où $M = M(f)$.) (long !)
- Pour ne pas avoir à refaire intégralement l'ensemble des calculs pour chaque valeur propre :
  on note $S$ la matrice la plus simple obtenue à partir des simplifications **par lignes uniquement** à partir de la matrice $M(f) - \lambda Id$. On pourra alors résoudre plutôt $SX = 0$ au lieu de $(M(f) - \lambda Id)X = 0$.

- Si on a utilisé la deuxième méthode pour déterminer les valeurs propres :

Il suffit de résoudre le système restant pour les valeurs propres trouvées.

■ **Exemple 6 :**

Les espaces propres de l'endomorphisme dans l'exemple précédent sont :

$$E_{-4} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voyons ceci par deux des stratégies proposées.

### Avec la stratégie 1 : en utilisant la matrice $M-\lambda Id$ simplifiée :

La matrice la plus simple que nous avons obtenue par manipulation de lignes à partir de $M - \lambda Id$ *(matrice appelée réduite de Gauss)* est

$$M - \lambda I \sim S = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 32 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16+2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est donc

$$\mathcal{S} = \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ (-\lambda^2 - 4\lambda + 8)x + (16+2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

pour chacun des $\lambda \in Sp(f) = \{0, -4, 4\}$.

⋆ <u>Si $\lambda = 0$</u> :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 16x + 32y = 0 \\ 8x + 16y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

D'où $E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

⋆ <u>Si $\lambda = 4$</u> :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -32x + 32y = 0 \\ -24x + 24y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ x = y \end{cases}$$

D'où $E_4 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⋆ De même si $\lambda = -4$ ...

### Stratégie 2 : en utilisant le système d'équations grâce auquel on a obtenu $Sp(f)$ :

Rappelons que si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, on a

$$(f - \lambda Id)(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 4)x = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $\lambda \in Sp(f) = \{0; -4; 4\}$, la dernière ligne s'annule et le système se résoud simplement.

⋆ <u>Si $\lambda = 4$</u> : $\quad (f - \lambda Id)(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -32x + 32y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ x = y \end{cases}$

D'où $E_4 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⋆ <u>Si $\lambda = -4$</u> : $\quad (f - \lambda Id)(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 32x + 32y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + z = 0 \\ x = -y \end{cases}$

D'où $E_{-4} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

---

### Si seules les dimensions de l'espace propre nous intéressent :

Il se peut que l'énoncé ne nécessite pas le calcul exact de l'espace propre associé à la *vap* $\lambda$, mais seulement la connaissance de la dimension de $E_\lambda$. Dans ce cas, notons que

$$\boxed{\dim E_\lambda = \dim \ker(f - \lambda Id) = n - \text{rg}(f - \lambda Id)}$$

Si on a utilisé la méthode 1 pour trouver les valeurs propres, ce rang est obtenu directement sur la matrice réduite de $M - \lambda Id$.

■ Exemple 7 :

Avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, on a trouvé une réduite : $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+4) \end{pmatrix}$.
Pour la valeur propre 4, on a donc

$$\text{rg}(M - 4Id) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

D'où

$$\dim E_4 = 3 - 2 = 1$$

**Remarque :** Dans le cas de cette matrice, on aurait pu trouver les dimensions associées d'une manière encore plus rapide. C'est ce que nous verrons entre autres par la suite.

## I-5 Valeurs propres d'une matrice

**Définition**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle $\lambda$ une *valeur propre* de $M$ s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que $MX = \lambda X$. On note $Sp(M)$ et on appelle *spectre de $M$* l'ensemble des valeurs propres de $M$.

**Définition**
Si $\lambda$ est une valeur propre de $M$, alors on note $E_\lambda(M) = \{X \in \mathbb{K}^n \,|\, M\,X = \lambda X\}$ et on appelle *vecteur propre* de valeur propre $\lambda$ de $M$ n'importe quel élément **non nul** de $E_\lambda(M)$. On appelle $E_\lambda(M)$ l'*espace propre* de la valeur propre $\lambda$.

■ Exemple 8 :

Avec $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $MV = 2V$ et donc $V$ est vecteur propre de valeur propre 2 de la matrice $M$.

**Remarque :**

Les vecteurs propres de matrice sont toujours des éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ (et non des polynômes ou autre...)

## Propriété 2

Si $f : E \to E$ est un endomorphisme associé à $M$ tel que $M = M_{\mathcal{B}}(f)$, alors

- $X$ est un vecteur propre de $M$ de vap $\lambda$ si et seulement si le vecteur $v$ de coordonnées $X$ dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de $f$, de vap $\lambda$.
- $\lambda$ est une valeur propre de $M$ si et seulement si c'est une valeur propre de $f$.

**Démonstration :**

• i) Soit $X$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et $v = X_{\mathcal{B}}$. Alors

$$\begin{aligned} X \text{ est un vecteur propre de } M &\iff MX = \lambda X \\ &\iff M_{\mathcal{B}}(f)X = \lambda X \\ &\iff f(v) = \lambda v \\ &\iff v \text{ est un vecteur propre de } f \text{ de vap } \lambda. \end{aligned}$$

• ii) C'est une conséquence directe de $i$). $\square$

**Exemple 9 :**

Supposons donné l'endomorphisme $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]; P \mapsto XP' - 2P$. Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on obtient la matrice de $u$ suivante :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On observe également directement sur la matrice que $v_1 = 1, v_2 = X, v_3 = X^2$ sont trois vep de l'endomorphisme $u$ (de vap. resp. $-2, -1, 0$). En posant alors

$$V_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i)$$

on obtient $V_1 = (1, 0, 0)$, $V_2 = (0, 1, 0)$, $V_3 = (0, 0, 1)$ et on peut (directement par calcul matriciel) observer qu'en effet, $V_1, V_2, V_3$ sont vecteurs propres de la matrice (resp. associés aux valeurs propres $-2, -1, 0$).

**Moralité de la propriété :** parler de valeur propre ("et vecteur propre") d'une matrice ou de l'endomorphisme associé est exactement la même chose. Les mêmes propriétés s'appliquent.

## Corollaire *n°1*

*L'ensemble des valeurs propres d'une matrice triangulaire est l'ensemble de tous les coefficients diagonaux.*

**Démonstration :**

Quitte à ce que les coefficients $*$ ci-dessous soient nuls ou à tansposer la matrice, on ne perd rien à supposer qu'elle est triangulaire supérieure. On pose

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda$ est une valeur propre de $M$ si et seulement si $\operatorname{rg}(M - \lambda Id) < n$. Or $D - \lambda Id = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$ qui est de rang $< n$ si et seulement si l'un des coefficients diagonaux s'annule, autrement dit, si et seulement si $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, d'où $Sp(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ $\square$

## Corollaire *n°2*

*Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.*

**Démonstration :**

Deux matrices semblables sont deux matrices d'un même endomorphisme exprimées dans deux bases différentes. $\square$

## Corollaire *n°3*

*Si $M$ est semblable à une matrice triangulaire ou diagonale $T$, alors $Sp(M)$ est constitué de* **tous les** *les coefficients diagonaux de $M$.*

**Démonstration :**

Le spectre d'une matrice triangulaire ou diagonale est constitué de l'ensemble de tous ses coefficients diagonaux et, d'après le corollaire précédent, $Sp(M) = Sp(T)$. $\square$

**Remarque :**

Pour un même vecteur propre $v \in E$ d'un endomorphisme $u$, en écrivant les matrices $M$ et $M'$ dans 2 bases différentes (i.e. $M$ et $M'$ semblables), les vecteurs propres de $M$ et $M'$ associés à $v$ sont reliés :

## Propriété 3

Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathbb{K}^n$. Alors,

$$MX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad M'X' = \lambda X'$$

où $X' = P^{-1}X$, si $M' = P^{-1}MP$. (ce qui correspond au changement de base.)

### Exemple 10 :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose le changement de base

$$\boxed{P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{pour lequel } P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{Si } M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}}$$

Vecteur propres de $M$ :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(vap resp. } 3, 0)$$

D'où les vecteurs propres de $M'$ :

$$V_1' = P^{-1}V_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_2' = P^{-1}V_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $V_i, V_i'$ sont donc les 2 écritures différentes de $e_i$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ :

$$V_1 = M_{\mathcal{B}}(e_1), \; V_1' = M_{\mathcal{B}'}(e_1), \quad V_2 = M_{\mathcal{B}}(e_2), \; V_2' = M_{\mathcal{B}'}(e_2)$$

Oon peut notamment vérifier que

$$MV_1 = 3V_1, \; MV_2 = 0V_2, \quad M'V_1' = 3V_1, \; M4V_2' = 0V_2'$$

# II Diagonalisation

## II-1 Définitions

**Définition**

Soit $f$ un endomorphisme (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée). On dit que $f$ (resp. $M$) est *diagonalisable* si elle admet (resp. si elle est semblable à) une matrice diagonale.

**Rappel :** Deux matrices semblables sont deux matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

## Corollaire

*Supposons que $M$ soit la matrice associée à $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$.*

*$M$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe $D$ diagonale telle que $M$ et $D$ soient deux matrices d'un même endomorphisme*
*$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathcal{B}'$ t.q. $M_{\mathcal{B}'}(f)$ soit diagonale.*
*$\Leftrightarrow$ $f$ est diagonalisable.*

**Remarque :**

De cette propriété, on déduit le langage (un peu abusif) pour une matrice $M$ d'être "diagonalisable dans une base $\mathcal{B}'$".

## II-2 Nombre de valeurs propres / dimension des espaces propres

## Théorème 4

*Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ des valeurs propres* **deux à deux distinctes** *d'un endomorphisme $f$, et $v_1, \ldots, v_d$ des vecteurs propres (non nuls) de valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, alors la famille $\{v_1, \ldots, v_d\}$ est libre.*

**Démonstration :**

(Par récurrence sur $d$.)
Soit $\mathcal{H}_d$ : ( Si $\lambda_1, \ldots \lambda_d$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme, toute famille $(v_1, \ldots v_d)$ de vecteus propres associés est libre. )

⋆ Initialisation : triviale $d = 1$. (Une famille d'un élément non nul est libre.)

⋆ Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_{d-1}$ vraie pour $d \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $\mathcal{H}_d$ est vraie.

Supposons qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_d v_d = 0$.
Par application de $f$, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_d v_d &= 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_d \lambda_d v_d &= 0 \end{aligned}$$

Pour $L_2 - \lambda_1 L_1$, on obtient

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \alpha_d(\lambda_d - \lambda_1)v_d = 0$$

Par hypothèse de récurrence, comme les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts, on trouve $\alpha_2 = \ldots = \alpha_d = 0$. Le cas $\alpha_1$ s'en déduit en réinjectant les résultats dans la première ligne. □

## Corollaire

*Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) où $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$.*

- *$f$ (resp. $M$) admet au maximum $n$ valeurs propres distinctes.*
- *Si $f$ (resp. $M$) admet $n$ valeurs propres distinctes, alors $f$ (resp. $M$) est diagonalisable.*

**Démonstration :**

- Supposons que $f$ (ou $M$) admette $d$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. Il existe alors $d$ vecteurs propres $v_1, \ldots, v_d$ de valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. La propriété nous indique que la famille $\{v_1, \ldots, v_d\}$ est libre. Ainsi,

$$d = \operatorname{card}\{v_1, \ldots, v_d\} \leqslant \dim E = n$$

- On note $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs propres associés aux $n$ valeurs propres distinctes. D'après la propriété précédente, la famille est libre de cardinal $n = \dim E$. C'est donc une base. Dans cette base, $f$ (resp. $M$) est diagonale ... par construction !

$\square$

### Remarque :

Si le nombre de valeurs propres distinctes est différent de $n = \operatorname{card} E$, on ne peut rien dire a priori, mais rien n'est déséspéré... !

### Exemple 11 :

Matrice diagonalisable : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *(car déjà diagonale)*

### Exemple 12 :

Matrice non diagonalisable : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ :

On a trivialement $Sp(M) = \{a\}$. Ainsi, si $M$ était diagonalisable, on aurait $M$ est semblable à $a\,Id$, d'où l'existence de $P$ inversible telle que

$$M = P\,a\,IdP^{-1} = aPP^{-1} = a\,Id$$

Or $M \neq aId$, d'où la contradiction.

## Théorème 5 *de juxtaposition des bases 1 :*

*Supposons donné :*

- *$\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ des valeurs propres 2 à 2* **distinctes** *de $f$ (resp. $M$)*
- *$\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_d$ des familles libres respectivement dans $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_d}$*

*Alors $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_d$ est libre.*

**Démonstration :**

Notons $\underbrace{v_1, \ldots, v_{s_1}}_{\text{dans } E_{\lambda_1}}, \underbrace{v_{s_1+1}, \ldots, v_{s_2}}_{\text{dans } E_{\lambda_2}}, \ldots, \underbrace{v_{s_{d-1}}, \ldots v_{s_d}}_{\text{dans } E_{\lambda_d}}$.

Montrons que $(v_1, \ldots, v_{s_d})$ est une famille libre par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$ :

$\star$ Initialisation : Si $d = 1$, la famille $(v_1, \ldots, v_{s_1})$ est libre par hypothèse.

$\star$ Hérédité : De $d-1$ à $d$. Supposons la propriété vraie pour $d - 1 \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie pour $d$.
On pose $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_d} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_{s_d} v_{s_d} = 0 \qquad (*_1)$$

on applique $f$ et on obtient

$$\underbrace{\alpha_1\lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{s_1}\lambda_1 v_{s_1}}_{vap\ \lambda_1} + \ldots + \underbrace{\alpha_{s_{d-1}+1}\lambda_d v_{s_{d-1}+1} + \ldots + \alpha_{s_d}\lambda_d v_{s_d}}_{vap\ \lambda_d} = 0 \qquad (*_2)$$

On fait $(*_2) - \lambda_d(*_1)$ et on obtient

$$\underbrace{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_d)v_1 + \ldots + \alpha_{s_1}(\lambda_1 - \lambda_d)v_{s_1}}_{vap\ \lambda_1} + \ldots + \underbrace{\alpha_{s_{d-2}+1}(\lambda_{d-1} - \lambda_d)v_{s_{d-2}+1} + \ldots + \alpha_{s_d}(\lambda_{d-1} - \lambda}_{vap\ \lambda_d}$$

Par HR, on obtient la liberté de $(v_1, \ldots, v_{s_{d-1}})$, d'où, comme les $\lambda_i$ sont 2 à 2 distincts,

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_{d-1}} = 0$$

Il reste

$$\alpha_{s_{d-1}+1} v_{s_{d-1}+1} + \ldots + \alpha_{s_d} v_{s_d} = 0$$

mais la famille $(v_{s_{d-1}+1}, \ldots v_{s_d})$ étant une famille libre, les $\alpha_i$ restant sont tous nuls.

$\star$ En conclusion, la famille $(v_1, \ldots, v_{s_d})$ est une famille libre.
$\square$

*On en déduit le théorème suivant :*

## Théorème 6 *de juxtaposition des bases 2 :*

*Supposons donné :*
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ *des valeurs propres 2 à 2* **distinctes** *de* $f$ *(resp.* $M$*)*
- $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_d$ *des familles libres respectivement dans* $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_d}$
- $card(\mathcal{B}_1) + \ldots + card(\mathcal{B}_d) \geqslant n$

*Alors*
- $card(\mathcal{B}_1) + \ldots + card(\mathcal{B}_d) = n$
- $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_d$ *est une base de* $E$
- $f$ *(resp.* $M$*) est diagonalisable dans la base* $\mathcal{B}$.

*De plus,*
- $\mathcal{B}_i$ *est finalement une base de* $E_{\lambda_i}$ *(i.e.* $card(\mathcal{B}_i) = \dim E_{\lambda_i}$*)*
- *il n'existe pas d'autre valeur propre de* $f$ *(resp.* $M$*.)*

**Démonstration :**

*démontré uniquement pour le cas de* $f$*, le cas de* $M$ *étant une conséquence immédiate.*

- $\text{card}(\mathcal{B}_1) + \ldots + \text{card}(\mathcal{B}_d) = n$ :

D'après le théorème précédent, $\mathcal{B}$ est une famille libre. On a de plus,

$$\text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}(\mathcal{B}_1) + \ldots + \text{card}(\mathcal{B}_d) \geqslant n$$

Or, une famille libre ne peut pas avoir plus de $n$ éléments, d'où $\text{card}(\mathcal{B}_1) + \ldots + \text{card}(\mathcal{B}_d) = n$.

- $\mathcal{B}$ est une base de $E$ :

C'est une famille libre avec $n = \dim E$ éléments, donc c'est une base de $E$.

- $f$ est diagonalisable dans $\mathcal{B}$ :

C'est immédiat, car dans la base $\mathcal{B}$ qui est un ensemble de vecteurs propres, la matrice de $f$ est diagonale.

- $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}$ :

On sait que $\mathcal{B}_i \subset E_{\lambda_i}$ et $card(\mathcal{B}_i) \leqslant \dim E_{\lambda_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, d$.
s'il existe $k$ tel que $card(\mathcal{B}_k) < \dim E_{\lambda_k}$, (quitte à réorganiser le vap, on peut supposer que $k = d$, alors il existe une base $\mathcal{B}'_k$ de $E_{\lambda_k}$ de cardinal

$$card(\mathcal{B}'_k) > card(\mathcal{B}_k).$$

Par le théorème précédent, la famille $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{d-1}, \mathcal{B}'_d)$ est libre, mais

$$\text{card}(\mathcal{B}_1) + \ldots + \text{card}(\mathcal{B}_{d-1}) + \text{card}(\mathcal{B}'_d) > \text{card}(\mathcal{B}_1) + \ldots + \text{card}(\mathcal{B}_d) = n$$

ce qui est donc impossible car une famille libre ne peut avoir plus de $n$ éléments. Ainsi, on a bien $card(\mathcal{B}_i) = \dim E_{\lambda_i}$ pour tout $i$ et la famille est alors bien une base de $E_{\lambda_i}$.

- Il n'existe pas d'autre vap :

S'il existait une valeur propre supplémentaire, cela reviendrait encore une fois à rajouter une famille libre à la famille $\mathcal{B}$ déjà existante, le tout étant alors encore libre par le théorème précédent, ce qui est impossible. □

**? Exercice 1**

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

*Solution*

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $M$ la matrice de l'énoncé. $M$ est triangulaire, on sait donc que ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux :

$$Sp(M) = \{1, 2\}$$

On observe immédiatement que $e_1, e_2$ sont des vecteurs propres de $M$ de valeur propre 1. On pose $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ et on a alors

$$\mathcal{B}_1 \subset E_1 \text{ une famille libre.}$$

De plus, on sait qu'il existe au moins un vecteur propre $v$ dans $E_2$. On note alors $\mathcal{B}_2 = \{v\}$. On a

$$\mathcal{B}_2 \subset E_2.$$

D'après le théorème de juxtaposition des bases, on sait alors que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, v)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$ de cardinal $\geq 3$. C'est donc une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$ et la matrice $M$ est bien diagonalisable.

*et dans les deux sens finalement, si on est certain d'avoir tout le spectre :*

## Théorème 7

*On se donne un endomorphisme* $f \in \mathcal{L}(E)$ *(resp. une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*) On note* $n = \dim E$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ *l'ensemble des valeurs propres* **distinctes** *de* $f$ *(resp.* $M$*). Alors*

$$\begin{aligned} f \text{ (resp. } M\text{) est diagonalisable} &\iff \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_d} \geq n \\ &\iff \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_d} = n \end{aligned}$$

**Démonstration :**

On démontrera ceci dans le cadre de l'application $f$. Il ne reste que le premier $\Rightarrow$ à démontrer par rapport au carollaire précédent.

Comme $f$ est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ dans laquelle la matrice $M$ de $f$ est diagonale. c'est-à-dire que chacun des éléments de la base est un vecteur propre. Quitte à réorganiser les vecteurs, on peut supposer qu'on a

$$\underbrace{v_1,\ldots,v_{s_1}}_{vap\ \lambda_1},\underbrace{v_{s_1+1},\ldots,v_{s_2}}_{vap\ \lambda_2},\ldots,\underbrace{v_{s_{d-1}},\ldots v_n}_{vap\ \lambda_d}$$

i.e. $v_1,\ldots,v_{s_1}\in E_{\lambda_1},\quad v_{s_1+1},\ldots,v_{s_2}\in E_{\lambda_2}\quad v_{s_{d-1}},\ldots v_n\in E_{\lambda_d}$.
d'où

$$Vect(v_1,\ldots,v_{s_1})\subset E_{\lambda_1},\quad Vect(v_{s_1+1},\ldots,v_{s_2})\subset E_{\lambda_2},\quad \ldots\quad Vect(v_{s_{d-1}+1},\ldots,v_{s_d})\subset E_{\lambda_d}$$

Comme toute sous-famille d'une base est une famille libre, on trouve

$$s_1\leqslant \dim E_{\lambda_1},\quad s_2-s_1\leqslant \dim E_{\lambda_2},\quad \ldots\quad s_{d-1}-s_{d-2}\leqslant \dim E_{\lambda_{d-1}}\quad n-s_{d-1}\leqslant \dim E_{\lambda_d}$$

d'où

$$n=s_1+(s_2-s_1)+\ldots+(n-s_{d-1})\leqslant \dim E_{\lambda_1}+\ldots+\dim E_{\lambda_d}$$

□

## II-3 Diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ?

**Exercice 2**

Montrer que si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre complexe non réelle, alors elle ne peut pas être semblable à une matrice diagonale réelle.

*Solution*

Supposons que $\lambda\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ soit une valeur propre de $M$. D'après une propriété précédente, quelquesoit la matrice diagonale en question, l'ensemble des valeurs propres figurent toutes sur la diagonale. L'une d'entre elle étant complexe, elle ne peut être réelle.

**Définition**

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $M$ est *diagonalisable sur $\mathbb{R}$* (resp. $\mathbb{C}$) si $M$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

**Exemple 13 :**

La matrice $M=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&-1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
M-\lambda Id &= \begin{pmatrix}2-\lambda&-1&1\\2&-1-\lambda&0\\-1&1&-\lambda\end{pmatrix}\\
&\underset{L_1\leftarrow L_1+L_3}{\sim}\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1-\lambda\\2&-1-\lambda&0\\-1&1&-\lambda\end{pmatrix}\\
&\underset{C_3\leftarrow C_3-C_1}{\sim}\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\2&-1-\lambda&-2\\-1&1&1-\lambda\end{pmatrix}\\
&\underset{C_2\leftrightarrow C_3}{\sim}\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\2&-2&-1-\lambda\\-1&1-\lambda&\boxed{1}\end{pmatrix}\\
&\underset{L_2\leftarrow L_2+(1+\lambda)L_3}{\sim}\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\\star&-1-\lambda^2&0\\\star&\star&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc les valeurs qui annulent $1-\lambda$ et $-1-\lambda^2$, autrement dit

$$Sp(M)=\{1,i,-i\}$$

Il y a trois valeurs propres distinctes et l'ordre de $M$ est trois. Ainsi, $M$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$ !

## Propriété 8

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\lambda$ est valeur propre de $M$ (de vecteur propre $X$,) ssi $\bar\lambda$ est valeur propre (de vecteur propre $\bar X$.)

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}
MX=\lambda X &\iff \overline{MX}=\overline{\lambda X}\\
&\iff \overline{M}\,\overline{X}=\overline{\lambda}\,\overline{X}
\end{aligned}$$

Or, comme $M$ est réelle, on a $\bar M=M$, d'où $M\,\overline{X}=\overline{\lambda}\,\overline{X}$ □

**Remarque :**

Cette propriété permet entre autres, si on a deux valeurs propres $\lambda,\bar\lambda$, de ne calculer qu'un seul espace propre. L'autre s'en déduit simplement par conjugaison.

**Commentaires :**

*La diagonalisabilité va nous servir, par exemple, à calculer les puissances $n^{\text{ème}}$ de matrices. Il ne faut donc pas s'arrêter à la diagonalisation dans $\mathbb{R}$ et ne pas hésiter à se servir des valeurs propres complexes !*

**Contre exemple :** SI $M$ n'est pas réelle, la propriété ne fonctionne pas.

Exemple : Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, alors $Sp(M) = \{1, i\}$ et $\bar{i}$ n'est pas vap.

Et avec diagonale $i; -i$ vecteurs propres

## II-4 Formule de changement de base

On note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose ici <u>$M$ diagonalisable.</u> On note

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \dots & v_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \star & & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \star & & \star \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{une matrice de vecteurs propres de } M$$

et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{la matrice de valeurs propres de } M \text{ associée}$$

où $\lambda_i$ est la valeur propre associée à $v_i$. *Notons qu'ici, on ne suppose pas forcément que les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts.*

Alors on a

$$\boxed{M = PDP^{-1}}$$

C'est en effet la formule de changement de base classique issue de

$$\boxed{\underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{M} = \underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}_{P} \underbrace{M_{\mathcal{B}'}}_{D} \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{P^{-1}}}$$

où $\mathcal{B}$ est la base en cours et $\mathcal{B}'$ la base de vecteurs propres.

# III Applications : puissances $n^{\text{èmes}}$

Si $M$ est diagonalisable, avec les notations de la partie précédente, on a $M = PDP^{-1}$. Ainsi, si l'on souhaite calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ de $M$, on a

$$M^n = \overbrace{(PD\cancel{P}^{-1})(\cancel{P}D\cancel{P}^{-1})\dots(\cancel{P}DP^{-1})}^{n \text{ fois}} = PD^nP^{-1}$$

Or, $D^n$ est facile à calculer, puisque

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

C'est cette stratégie que nous allons tenter d'utiliser dans la suite.

## III-1 Suites récurrentes linéaires

On souhaite déterminer de manière exacte l'expression de $u_n$ sachant que

$$u_{n+d} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{d-1} u_{n+d-1}$$

### Exemple 14 :

$$\boxed{u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n.}$$

• <u>Mise en forme du problème sous forme de matrice :</u>

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, alors

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

i.e. $\boxed{U_{n+1} = AU_n,}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$U_n = A^n U_0$$

Il est donc "très utile" de pouvoir calculer $A^n$, ou au moins la dernière ligne de $A^n$, grâce à laquelle on trouvera $u_n$ en fonction de $u_2, u_1, u_0$, puisque

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = U_n = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

• <u>Diagonalisation de $A$ ?</u>

Les valeurs propres de $A$ sont $-i, i$ et $-1$, avec

$$E_i = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_{-i} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_{-1} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

• <u>$A^n$</u>

Le calcul de $P^{-1}$ donne $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1+i & 2i & -1+i \\ 1-i & -2i & -1-i \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Tout ce qui nous intéresse est la dernière ligne :

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 2(-1)^n - 2Re(i^n(1+i)) & 2Re(-2i\,i^n) & 2(-1)^n - 2Re(i^n(-1+i)) \end{pmatrix}$$

i.e.

$$A^{2n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1-(-1)^n & 0 & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A^{2n+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1-(-1)^{n+1} & 2(-1)^n & -1-(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2}\left((1-(-1)^n)u_2 + (1+(-1)^n)u_0\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_{2n+1} &= \frac{1}{2}\left((-1-(-1)^{n+1})u_2 + 2(-1)^n u_1 + (-1-(-1)^{n+1})u_0\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}}$$

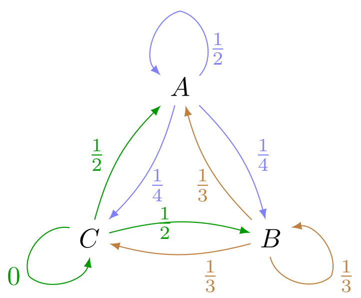
## III-2 Sauts aléatoires par un exemple

On suppose qu'une puce se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle $ABC$. À chaque saut, les probabilités sont les suivantes :

• Si la puce est sur $A$ :
la probabilité de rester sur $A$ sur est de $1/2$
la probabilité d'aller sur $B$ est de $1/4$
la probabilité d'aller sur $C$ est de $1/4$

• Si la puce est sur $B$ :
la probabilité d'aller sur $A$ sur est de $1/3$
la probabilité de rester sur $B$ est de $1/3$
la probabilité d'aller sur $C$ est de $1/3$

• Si la puce est sur $C$ :
la probabilité d'aller sur $A$ sur est de $1/2$
la probabilité d'aller sur $B$ est de $1/2$
la probabilité de rester sur $C$ est de $0$




Si on note $a_n, (resp. b_n, c_n)$ les probalilités de se trouve sur le point $A$ (resp. $B, C$) juste après avoir effectué le $n^{\text{ème}}$ saut, on souhaite calculer ces valeurs en fonction de $a_0, b_0, c_0$.

Si on note $M_n$ le point sur lequel on est juste après le $n^{\text{ème}}$ saut

$$\begin{cases} a_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=A)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=A)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=A)c_n \\ b_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=B)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=B)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=B)c_n \\ c_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=C)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=C)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=C)c_n \end{cases}$$

Ce qui peut s'exprimer sous forme matricielle

$$U_{n+1} = H_n U_n,$$

où $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $H_n = \begin{pmatrix} P_{M_n=A}(M_{n+1}=A) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=A) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=A) \\ P_{M_n=A}(M_{n+1}=B) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=B) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=B) \\ P_{M_n=A}(M_{n+1}=C) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=C) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=C) \end{pmatrix}$

ce qui, avec les valeurs de l'énoncé ici, donne

$$H_n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$H_n$ étant constante en fonction de $n$, on note $H = H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on obtient

$$U_n = H^n U_0$$

Il reste à calculer $H^n$ en essayant de diagonaliser !

• Diagonalisation de $H$ : *(exercice)*

les valeurs propres sont

$$1, \ -\frac{1}{12}(\sqrt{7}+1), \ \frac{1}{12}(\sqrt{7}-1)$$

et des vecteurs propres associés sont

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{7} \\ -3-\sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{7} \\ \sqrt{7}-3 \end{pmatrix}$$

Il y a trois valeurs propres pour une matrice d'ordre 3. Elle est diagonalisable, avec

$$H^n = PD^nP^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1+\sqrt{7} & 1-\sqrt{7} \\ 2 & -3-\sqrt{7} & \sqrt{7}-3 \end{pmatrix}$$

on a

$$P^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5-\frac{11}{\sqrt{7}} & \frac{16}{\sqrt{7}}-4 & -\frac{2}{\sqrt{7}}-4 \\ 5+\frac{11}{\sqrt{7}} & -\frac{16}{\sqrt{7}}-4 & \frac{2}{\sqrt{7}}-4 \end{pmatrix}$$

Alors

$$H^n = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 16+10\lambda_n+\frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n & 16-8\lambda_n-\frac{32}{\sqrt{7}}\mu_n & 16-8\lambda_n+\frac{4}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12-6\lambda_n-\frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n & 12+12\lambda_n+\frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n & 12-6\lambda_n+\frac{30}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8-4\lambda_n+\frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n & 8-4\lambda_n+\frac{20}{\sqrt{7}}\mu_n & 8+14\lambda_n-\frac{34}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_n = \left(-\dfrac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n$ et $\mu_n = \left(\dfrac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\dfrac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n$

## Conclusion :

Connaissant $H^n$, on peut déterminer les probabilités d'être sur n'importe quel point à l'instant $n$. Par exemple, si la puce part du point $A$, alors on a

$$U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} U_n = H^n U_0 &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 16+10\lambda_n+\frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n & 16-8\lambda_n-\frac{32}{\sqrt{7}}\mu_n & 16-8\lambda_n+\frac{4}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12-6\lambda_n-\frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n & 12+12\lambda_n+\frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n & 12-6\lambda_n+\frac{30}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8-4\lambda_n+\frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n & 8-4\lambda_n+\frac{20}{\sqrt{7}}\mu_n & 8+14\lambda_n-\frac{34}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 16+10\lambda_n+\frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12-6\lambda_n-\frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8-4\lambda_n+\frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8+5\lambda_n+\frac{11}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 6-3\lambda_n-\frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 4-2\lambda_n+\frac{1}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou autrement dit, si la puce part de $A$, la probabilité après le $n^{\text{ème}}$ saut d'être

$$\begin{array}{c|c|l} \text{en } A & & \frac{4}{9}+\frac{5}{18}\left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n\right)+\frac{11}{18\sqrt{7}}\left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n-\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n\right) \\ \text{en } B & \text{est de} & \frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n\right)-\frac{2}{3\sqrt{7}}\left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n-\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n\right) \\ \text{en } C & & \frac{2}{9}-\frac{1}{9}\left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n\right)+\frac{1}{18\sqrt{7}}\left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n-\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n\right) \end{array}$$